Wir wählen jetzt R beliebig $> K$ und betrachten das Funktional

$$A_\Omega(f) = \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla f|^2}\, dx$$

auf der Klasse $Lip_R(\Omega, \varphi)$, f_R sei die nach Satz 6.2 existierende eindeutige Minimalstelle von A_Ω in $Lip_R(\Omega, \varphi)$, und wir zeigen:

$$* \qquad Lip(f_R) \leq K ,$$

d.h. die Lipschitz Konstante von f_R wird durch K beschränkt und ist somit echt kleiner als R.

Zum Beweis von $*$ wählt man $x_0 \in \partial\Omega$ und dazu affin lineare Funktionen $L^\pm : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$L^- \leq \varphi \leq L^+ \text{ auf } \partial\Omega, \quad L^-(x_0) = \varphi(x_0) = L^+(x_0),$$
$$Lip(L^\pm) \leq K.$$

Die Funktionen $L^\pm$ gehören zu $Lip_R(\Omega, L^\pm|_{\partial\Omega})$, lösen auf Ω natürlich die Minimalflächengleichung, mithin folgt aus Teil iii) von Satz 6.3, daß $L^\pm$ die eindeutigen A_Ω-Minimalstellen in $Lip_R(\Omega, L^\pm|_{\partial\Omega})$ sind. Also können wir das Vergleichsprinzip Satz 6.3 ii) anwenden, woraus folgt:

$$L^- \leq f_R \leq L^+ \quad \text{auf } \overline{\Omega}.$$

Für $x \in \overline{\Omega}$ bedeutet dies:

$$f_R(x) - f_R(x_0) \leq L^+(x) - f_R(x_0) = L^+(x) - \varphi(x_0) =$$

$$= L^+(x) - L^+(x_0) \leq K \cdot |x - x_0|$$

und entsprechend $f_R(x) - f_R(x_0) \geq -K \cdot |x - x_0|$, so daß

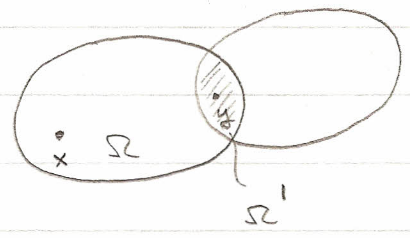
wir zunächst bekommen:

$$** \quad \begin{cases} |f_R(x) - f_R(y)| \leq K \cdot |x-y|, \\ x \in \overline{\Omega}, \quad y \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Seien x, y nun beliebige Punkte aus Ω. Man setzt $v := y - x$ und betrachtet das Gebiet

$$\Omega' := \Omega \cap (v + \Omega),$$

wo $v + \Omega$ die um v verschobene Menge repräsentiert.



Man setzt $f_{1,2} : \Omega' \to \mathbb{R}$,

$$f_1(z) := f_R(z), \quad f_2(z) := f_R(z - v),$$

und sieht: f_i ist $A_{\Omega'}$-minimal in $\mathrm{Lip}_R(\Omega', f_i|_{\partial\Omega'})$,

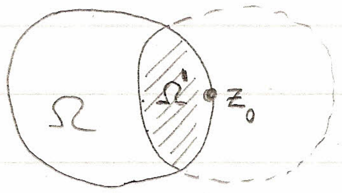
das Vergleichsprinzip Satz 6.2 ii) liefert die Abschätzung

$$\sup_{\Omega'} |f_1(z) - f_2(z)| \leq \sup_{\partial\Omega'} |f_1(z) - f_2(z)|, \text{ also}$$

$$\sup_{z\in\Omega'} |f_R(z) - f_R(z-v)| \leq \sup_{z\in\partial\Omega'} |f_R(z) - f_R(z-v)|.$$

Das Supremum rechts wird realisiert in einem Punkt $z_0 \in \partial\Omega'$.

Fall 1: $z_0 \in \partial\Omega \cap \partial\Omega'$



Dann ist

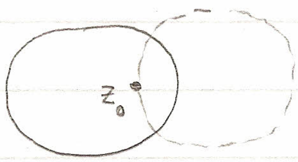
$$|f_R(y) - f_R(x)| = |f_R(y) - f_R(y-v)| \leq$$

$$\sup_{z\in\Omega'} |f_R(z) - f_R(z-v)| \leq |f_R(z_0) - f_R(z_0-v)|$$

Der Punkt $z_0 - v$ liegt in $\overline{\Omega}$, z_0 gehört zum Rand von Ω, also gilt nach $**$

$$|f_R(z_0) - f_R(z_0-v)| \leq K \cdot |v| = K \cdot |x-y|.$$

Fall 2: $z_0 \in \Omega \cap \partial\Omega'$



Dann gehört $z_0 - v$ zu $\partial\Omega$ und man kann wieder $**$ benutzen.

Insgesamt ist damit bewiesen:

SATZ 6.4: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und konvex. $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ sei Lipschitz stetig, und die B.S.C. sei mit $K > 0$ erfüllt. Dann gilt für $R > K$:

$$\mathrm{Lip}\,(f_R) \leq K,$$

wobei f_R die früher die eindeutige Minimalstelle von A_Ω in $\mathrm{Lip}_R\,(\Omega, \varphi)$ bezeichnet. Die Lipschitz Konstante von f_R ist also echt kleiner als die vorgegebene Schranke R.

Bemerkungen: 1) Satz 6.4 beinhaltet eine sogenannte apriori Abschätzung für den Gradienten, die durch die B.S.C. erzwungen wird.

2) Aus der Lipschitz Stetigkeit von $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ zusammen mit der Gültigkeit der B.S.C. mit Konstante K folgt natürlich

$$\mathrm{Lip}\,(\varphi) \leq K,$$

denn sind $L^{\pm}$ entsprechende Funktionen zum Randpunkt $x \in \partial\Omega$, so gilt

$$\varphi(x) - \varphi(y) \overset{..}{=} L^-(x) - \varphi(y) \leq L^-(x) - L^-(y) \leq K \cdot |x-y|$$

und entsprechend

$$\varphi(x) - \varphi(y) \geq L^+(x) - L^+(y) \geq -K\,|x-y|.$$

Nach diesen Vorbereitungen sind wir jetzt in der Lage, einen Existenzsatz für das Minimalflächenproblem zu formulieren:

SATZ 6.5: Sei Ω beschränkt und konvex sowie $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ Lipschitz stetig. Erfüllen Ω und φ eine B.S.C., so gibt es genau eine Funktion $f \in \mathrm{Lip}(\Omega,\varphi) := \{ g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} \mid g \text{ Lipschitz mit } g|_{\partial\Omega} = \varphi \}$, so daß

$$A_\Omega(f) = \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla f|^2}\, dx \leq A_\Omega(g)$$

für alle $g \in \mathrm{Lip}(\Omega,\varphi)$ gilt.

Beweis: Man wählt $R > K$ (Konstante aus der B.S.C.) und betrachtet die A_Ω - Minimalstelle f_R in $\mathrm{Lip}_R(\Omega,\varphi)$. Nach Satz 6.4 gilt

$$\mathrm{Lip}(f_R) < R,$$

so daß $f_R + \varepsilon \cdot (g - f_R) \in \mathrm{Lip}_R(\Omega,\varphi)$ ist für jede beliebige Funktion $g \in \mathrm{Lip}(\Omega,\varphi)$ vorausgesetzt $|\varepsilon| << 1$. Es folgt

$$A_\Omega(f_R) \leq A_\Omega(f_R + \varepsilon(g - f_R)) \implies \quad (f := f_R)$$

$$\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_0 \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla(f+\varepsilon(g-f))|^2}\, dx = 0 \iff$$

$$(1). \qquad \int_\Omega (1+|\nabla f|^2)^{-1/2}\, \nabla f \cdot \nabla(g-f)\, dx = 0.$$

Mit $F(p) := \sqrt{1+|p|^2}$ ist für zwei verschiedene Punkte $p, q \in \mathbb{R}^n$

$$F(q) - F(p) = \nabla F(p) \cdot (q-p) + D^2 F(q^*) (q-p, q-p),$$

wo q^* eine geeignete Zwischenstelle bezeichnet. Nun ist F konvex, also

$$D^2 F(q^*) (q-p, q-p) \geq 0,$$

und mit $q := \nabla g$, $p := \nabla f$ folgt

$$\int_\Omega \sqrt{1+|\nabla g|^2}\, dx - \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla f|^2}\, dx \geq$$

$$\int_\Omega \nabla f \cdot \nabla (g-f) \left(1+|\nabla f|^2\right)^{-1/2} dx,$$

und die rechte Seite ist gemäß (1) identisch 0, also

$$\int_\Omega \sqrt{1+|\nabla g|^2}\, dx \geq \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla f|^2}\, dx,$$

und das war zu zeigen. ∎

Lassen wir also Lipschitz Graphen als Minimalflächen zu, so finden wir in dieser erweiterten Klasse eine Fläche kleinsten Inhalts. Es stellt sich nun natürlich die Frage, ob man an solchen Lösungen überhaupt interessiert ist, denn Lipschitz Graphen können ja durchaus Knickstellen haben, so daß gar keine Mannigfaltigkeit im Sinne unserer früheren Definition vorliegen muß. Es ist zum Beispiel unmöglich, die mittlere Krümmung für Lipschitz Graphen zu erklären. Somit besteht eine Lücke zwischen unseren Betrachtungen aus § 5, wo wir C^2-Lösungen $f : \Omega \to \mathbb{R}$

der nicht parametrischen Minimalflächengleichung

$$(2) \qquad \operatorname{div}\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right) = 0$$

diskutiert haben, und der vorstehenden Diskussion der Existenzfrage, die man leider nur in Klassen von nicht glatten Funktionen führen kann: der naheliegende Gedanke

$$\int_\Omega \sqrt{1+|\nabla f|^2}\, dx \rightsquigarrow \mathrm{Min}$$

auf $\mathcal{C} := \{ f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}) : f|_{\partial\Omega} = \varphi \}$ zu studieren und damit

direkt glatte Lösungen von (2) zu produzieren, führt nicht zum Ziel. Ist $\{f_m\}$ Minimalfolge in $\mathcal{C}$, so möchte man eine Teilfolge wählen, die gegen eine C^2-Funktion $f \in \mathcal{C}$ konvergiert. Dazu ist aber erforderlich, solche Schranken auf (f_m) zu finden, die Kompaktheit in der C^2-Topologie garantieren. (Zum Beispiel könnten C^3-Normen von f_m uniform beschränkt sein, was die Anwendbarkeit von Arzela Ascoli bedeuten würde.) Leider hat man zuwenig Information über die Minimalfolge, mit der direkten Methode der Variationsrechnung lassen sich keine glatten Lösungen produzieren.

Andererseits hegt man durchaus die Hoffnung, daß unsere Lipschitz Minimalstelle $f : \Omega \to \mathbb{R}$ vielleicht besser regulär ist als es zunächst den Anschein hat. Dies führt uns in die sogenannte <u>Regularitätstheorie</u>. Tatsächlich gilt der sehr tiefe

<u>SATZ 6.6</u>: (Regularitätssatz von De Giorgi)

Die in Satz 6.5 erzeugte Lipschitz Minimalstelle ist auf Ω reell analytisch.

Dieser Satz hat eine lange Geschichte, die mit der Untersuchung des zweidimensionalen Spezialfalls $n = 2$ durch Haar und Rado um 1930 beginnt. Wir wissen bereits:

> Für $n = 2$ sind C^2-Lösungen der nichtparametrischen Minimalflächengleichung reell analytisch.

Mithin bleibt zu zeigen, daß die Lipschitz Minimalstelle zweimal stetig differenzierbar ist, und genau das wurde von Haar und Rado mit einem relativ einfachen Argument bewiesen. Eine Beweisskizze findet man bei [Nitsche, §639, 640] und im Buch von Rado. Diese Argumente sind allerdings streng zweidimensionaler Natur und haben keine Verallgemeinerung für Dimensionen $n \geq 3$.

In höheren Dimensionen $n \geq 3$ ist die Situation folgendermaßen: Die allgemeine Theorie der nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen liefert

> Ist f von der Klasse $C^{1,\alpha}$ (die 1ten Ableitungen sind Hölder stetig mit einem Exponenten $0 < \alpha < 1$), so folgt Analyzität von f.

Dies wurde von Morrey in den vierziger Jahren bewiesen. Übrig bleibt der Sprung von Lipschitz auf $C^{1,\alpha}$, und darin besteht die Leistung von E. De Giorgi (aus Pisa), dem dies 1957 gelang. Leider ist diese Arbeit in einer heute nicht mehr existierenden italienischen Zeitschrift publiziert, vielleicht werde ich den Beweis im nächsten Semester vortragen.

Einen völlig anderen Zugang zum Existenz- und Regularitätsproblem bei der nichtparametrischen Minimalflächengleichung findet man bei Gilbarg & Trudinger, die zunächst apriori Abschätzungen für glatte Lösungen beweisen und dann funktionalanalytische Argumente ins Spiel bringen.